参数曲面片曲率连续的条件

许中兴
智能软件研究中心
中国科学院软件研究所
xuzhongxing@iscas.ac.cn

1 背景

Kahmann 在 [1] 中给出了相邻曲面片曲率连续的构造条件，在推导中用到了 Dupin indicatrix，在一个 remark 中提到如果 asymptotic direction 相同，并且在另外一个方向上法曲率相同，则 Dupin indicatrix 就相同，但没有给出证明。文中的公式 (14) 的计算也没有具体步骤，而是引用了他的博士论文，但他的博士论文是德文的。

我在推导法曲率连续条件的过程中发现，实际上并不需要 Dupin indicatrix 和 asymtotic direction 这些概念。只需要利用法曲率的定义公式硬算就可以得到和 Kahmann 相同的构造条件。

2 概念

在 CAGD 中经常用到几何连续的概念。几何连续不是参数连续，而是形状上的连续。

曲面的一阶几何连续是它的切平面连续，即单位法向量连续。

曲面的二阶几何连续是它的（任意方向上的）法曲率 (normal curvature) 连续。法曲率的定义及其他微分几何的基础参考 [2]. 在曲面上的一个点上，某个切方向上的法曲率 κ_n 就是在这个点和切方向上的第二基本形式和第一基本形式的比值。

设曲面片的参数表示为 $S = a(u, v)$. 曲面上有一条参数曲线为 $\lambda(t) = a(u(t), v(t))$. 参数曲线的导数定义的切方向为 $\dot{\lambda}(t) = a(\dot{u}(t), \dot{v}(t))$. 切方向上的法曲率公式为:

$$\kappa_n = -\frac{(a_u \cdot N_u)\dot{u}^2 + 2(a_u \cdot N_v)\dot{u}\dot{v} + (a_v \cdot N_v)\dot{v}^2}{(a_u \cdot a_u)\dot{u}^2 + 2(a_u \cdot a_v)\dot{u}\dot{v} + (a_v \cdot a_v)\dot{v}^2}$$

其中，$a_u = \frac{\partial a}{\partial u}$, $a_v = \frac{\partial a}{\partial v}$。$N = \frac{a_u \times a_v}{||a_u \times a_v||}$ 为单位法向量。

由于 $N \cdot a_u = 0$, 分别对 u 和 v 求导可以得到 $N_v \cdot a_u = -N \cdot a_{uv}$, $N \cdot a_{uu} = -N_u \cdot a_u$。对称地有 $N_u \cdot a_v = -N \cdot a_{uv}$, $N \cdot a_{vv} = -N_v \cdot a_v$。

从而法曲率公式可以写成：

$$\kappa_n = \frac{(a_{uu} \cdot N)\dot{u}^2 + 2(a_{uv} \cdot N)\dot{u}\dot{v} + (a_{vv} \cdot N)\dot{v}^2}{(a_u \cdot a_u)\dot{u}^2 + 2(a_u \cdot a_v)\dot{u}\dot{v} + (a_v \cdot a_v)\dot{v}^2}$$

3 相邻曲面片一阶几何连续条件

假设有 2 个相邻的曲面片 $A = a(u, v)$ 和 $B = b(x, y)$. 参数的取值范围为 $x \in [0, 1], y \in [0, 1]$. 它们有一条相邻的边 $a(1, v) = b(0, y)$, 其中 v 和 y 取值相同时面片取值相同。

曲面片 A 和 B 在邻接边上一阶几何连续的意思是，它们在邻接边上的单位法向量处处相等。也就是说 a_u, a_v, b_x, b_y 要在同一个平面里。由于 $a_v = b_y$, 所以只需要假设在邻接边上 $b_x = pa_u + qa_v$ 即可。这里我们为了写法简略一些, 省去了自变量 v。完整的写法是: $b_x(y) = p(v)a_u(v) + q(v)a_v(v)$, v 和 y 就是相同参数在 2 个面片中的不同写法。从而在邻接边上有单位法向量的导数也处处相等:

$$N_v = N_y$$

4 相邻曲面片二阶几何连续条件

相邻曲面片的二阶几何连续就是在邻接边上它们的任意方向上的法曲率处处相等。下面我们通过直接计算 2 个曲面的法曲率来推导构造条件。

首先由一阶几何连续条件有:

$$b_y = a_v \tag{1}$$

$$b_x = pa_u + qa_v \tag{2}$$

其次假设要计算法曲率的方向为 ψ. 假设在 2 个曲面中各有一条参数曲线 $a(u(t), v(t))$ 和 $b(x(t), y(t))$ 在边界点上的导数等于 ψ. 从而有:

$$a_u\dot{u}+a_v\dot{v}=\psi=b_x\dot{x}+b_y\dot{y}$$

把 b_x 和 b_y 用 a 的表达式替换掉，得：

$$a_u\dot{u}+a_v\dot{v}=pa_u\dot{x}+qa_v\dot{x}+a_v\dot{y}$$

通过对比 a_u 和 a_v 的系数，我们得到另外 2 个重要的等式关系：

$$\dot{u}=p\dot{x} \tag{3}$$

$$\dot{v}=q\dot{x}+\dot{y} \tag{4}$$

下面就根据公式计算 2 个曲面片的法曲率，可以得到它们是相等的，这里面没有什么技巧，就是硬算。

面片 A 的第一基本形式：

$$\begin{aligned}
&(a_u\cdot a_u)\dot{u}^2+2(a_u\cdot a_v)\dot{u}\dot{v}+(a_v\cdot a_v)\dot{v}^2 && (5)\\
=&(a_u\cdot a_u)p^2\dot{x}^2+2(a_u\cdot a_v)p\dot{x}(q\dot{x}+\dot{y})+(a_v\cdot a_v)(q\dot{x}+\dot{y})^2 && (6)\\
=&[(a_u\cdot a_u)p^2+2(a_u\cdot a_v)pq+(a_v\cdot a_v)q^2]\dot{x}^2 && (7)\\
&+(2(a_u\cdot a_v)p+2(a_v\cdot a_v)q)\dot{x}\dot{y}+(a_v\cdot a_v)\dot{y}^2 && (8)
\end{aligned}$$

面片 B 的第一基本形式：

$$\begin{aligned}
&(b_x\cdot b_x)\dot{x}^2+2(b_x\cdot b_y)\dot{x}\dot{y}+(b_y\cdot b_y)\dot{y}^2 && (9)\\
=&(pa_u+qa_v)\cdot(pa_u+qa_v)\dot{x}^2+2((pa_u+qa_v)\cdot a_v)\dot{x}\dot{y}+(a_v\cdot a_v)\dot{y}^2 && (10)\\
=&[(a_u\cdot a_u)p^2+2(a_u\cdot a_v)pq+(a_v\cdot a_v)q^2]\dot{x}^2 && (11)\\
&+(2(a_u\cdot a_v)p+2(a_v\cdot a_v)q)\dot{x}\dot{y}+(a_v\cdot a_v)\dot{y}^2 && (12)
\end{aligned}$$

两个面片的第一基本形式完全相等。

面片 A 的第二基本形式：

$$\begin{aligned}
&(a_{uu}\cdot N)\dot{u}^2+2(a_{uv}\cdot N)\dot{u}\dot{v}+(a_{vv}\cdot N)\dot{v}^2 && (13)\\
=&(a_{uu}\cdot N)p^2\dot{x}^2+2(a_{uv}\cdot N)p\dot{x}(q\dot{x}+\dot{y})+(a_{vv}\cdot N)(q\dot{x}+\dot{y})^2 && (14)\\
=&N\cdot(p^2a_{uu}+2pqa_{uv}+q^2a_{vv})\dot{x}^2+2N\cdot(pa_{uv}+qa_{vv})\dot{x}\dot{y}+N\cdot a_{vv}\dot{y}^2 && (15)
\end{aligned}$$

面片 B 的第二基本形式:

$$(b_{xx} \cdot N)\dot{x}^2 + 2(b_{xy} \cdot N)\dot{x}\dot{y} + (b_{yy} \cdot N)\dot{y}^2 \tag{16}$$

首先比较 $\dot{y}^2$ 的系数。$N \cdot a_{vv} = -N_v \cdot a_v$, $N \cdot b_{yy} = -N_y \cdot b_y$. 从而系数相等。

再比较 $\dot{x}\dot{y}$ 项的系数。$N \cdot b_{xy} = -N_y \cdot b_x = -N_v \cdot (pa_u + qa_v)$. $N \cdot (pa_{uv} + qa_{vv}) = -N_v \cdot (pa_u + qa_v)$. 也相等。

从而 $\dot{x}^2$ 的系数也必须相等: $N \cdot (p^2 a_{uu} + 2pqa_{uv} + q^2 a_{vv}) = N \cdot b_{xx}$, 即 $b_{xx} - (p^2 a_{uu} + 2pqa_{uv} + q^2 a_{vv})$ 需要在与 N 垂直的平面内。所以得到和 [1] 中公式 (15) 相同的条件:

$$b_{xx} = p^2 a_{uu} + 2pqa_{uv} + q^2 a_{vv} + ra_u + sa_v$$

参考文献

[1] Juergen Kahmann. Continuity of curvature between adjacent bezier patches. In *Surfaces in Computer Aided Geometric Design*. North-Holland Publishing Company, 1983.

[2] Dirk J. Struik. *Lectures on Classical Differential Geometry*. Dover, 1988.