

自由曲面造型思想概述

许中兴

智能软件研究中心

中国科学院软件研究所

xuzhongxing@iscas.ac.cn

自由曲面造型的方法从思想上来说主要有这三种：填充、扫略、散列数据插值。另外还有很常用的方法，比如拉伸，由于它比较简单，可以归结为扫略的平凡情况，就没有单独列出来。

1 填充

填充也叫 blending, 给定 2 条或者 4 条曲线，用插值的方法确定它们之间的曲面。

给定相对的 2 条曲线，直接用线性插值就可以确定它们之间的曲面。如果再给定两端的切向约束，用 Hermite 插值就可以得到和两端切向连续的曲面。

给定 4 条曲线，用 Coons 方法可以得到它们围起来的曲面。如果没有切向约束，用双线性插值即可。如果有切向约束，麻烦就来了。用标准的 Coons 方法可以得到和四周都保持切向连续的填充面，但前提条件是切向约束在四个角点处的混合偏导数 $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}$ 是要相等的。

有一些方法是处理混合偏导数不兼容的情况的，但是都很麻烦。所以 Coons 填充一般就用在做 fillet（圆角）这种小曲面的地方，而且要保证相邻的曲面是兼容的。

填充曲面里还有一种是 Gordon 面，可以填充由多条交叉曲线形成的网格。

2 扫略

扫略的叫法很多，还可以是多截面曲面，skinning，或者 lofting。它们有一些细微的差别，但是思想是一样的，都是用一个截面曲线沿着一个维度移动，移动的过程中截面线可以进行位姿和比例的变化。从移动开始到结束扫过的面就是最终得到的曲面。

提供的条件用来约束这个截面曲面的变化方式。比如可以提供多个位置上的截面线，要求起始截面线在移动过程中要对这些截面线进行插值。也可以提供一条或者二条向导线，或者叫脊线，让截面线移动过程中两端与向导线接触。

假设截面曲线是 B 样条曲线，那么在移动的过程中它的每个控制点也会形成自己的轨迹曲线。这些轨迹曲线的控制点，就是扫出来的张量曲面的控制点。

如果我们能够对截面线移动过程中进行足够密集的采样，就可以用逼近的方法把控制点的轨迹曲线计算出来。当然这里有很复杂的细节，需要把所有截面线采样统一成相同的 knots 和阶数。

在两端同样可以添加切向约束，满足切向约束的方法是让截面线控制点的轨迹曲线的控制点（也就是张量面的控制点）和相邻的曲面的控制点（假设也是张量面）在同一直线上。截面线的控制点的轨迹曲线在边界处保持切向连续，从而截面线扫略出的曲面也保持切向连续。

扫略是一种主要的自由曲面造型方法。在这种思想框架下加入不同的变化，可以提供丰富的造型能力。

3 散列数据插值

这种曲面造型的思路比前面的方法更进一步的依赖 B 样条曲线强大的拟合能力。这种方法的思路是：只要能在数学上将所需要的曲面精确表示出来，并且能进行任意精度的采样，那么接下来就把曲面交给 B 样条曲线去拟合近似表示成所需要的 NURBS 形式就可以了。

这种造型方法适用于任意约束的情况，比如可以填充一个非四边形的多边形边界，并在边界上加上切向约束，在多边形内部还可以加入任意的需要插值的点和线。

表示方法依赖于某种径向基函数 (radial basis function)。用选定的径向基函数，如 Thin Plate Spline 函数 $\phi(r_i) = r_i^2 \log(r_i)$ ，根据指定的约束条

件进行插值，得到一个曲面的数学表示。得到的曲面往往还具备某些变分性质，如弯曲能量最小化。

得到了曲面的数学表示之后，对曲面进行采样，用正交多项式（如 Legendre 多项式）对曲线和曲面进行逼近，再用 B 样条函数对多项式进行逼近，最终得到 NURBS 标准表示。