机器人学笔记

许中兴
智能软件研究中心
中国科学院软件研究所
xuzhongxing@iscas.ac.cn

1 基本定义和公式

Special orthogonal group $SO(3)$ 是所有的 3×3 矩阵 R 满足：(1) $R^T R = I$，(2) $detR = 1$

Special Euclidean group $SE(3)$ 是所有的 4×4 矩阵 T 满足：

$$T = \begin{bmatrix} R & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $R \in SO(3)$, $r \in \mathbb{R}^3$。R 决定的是方向，r 决定的是位置。

ω 为 3 维向量，令 a

$$[\omega] := \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

为斜对称矩阵。

向量叉乘可以变成矩阵乘法：

$$\omega \times q = [\omega]q$$

$$[Rr] = R[r]R^T$$

其中 $R \in SO(3)$

线速度和角速度的关系：

$$v = \omega \times p = [\omega]p$$

函数 $atan2(y,x)$ 返回的是点 (x,y) 与原点形成的角度，它的值域是 $(-\pi,\pi)$。tan^{-1} 的值域是 $(-\pi/2,\pi/2)$

2 点和向量

点 (point) 和向量 (vector) 如果用三维坐标表示，则很难区分。如果用四维的齐次坐标表示，则它们之间的区别就非常明显。

我们给点的三维坐标增加一维，增加的这一维永远是 1，也就是

$$p=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\1\end{bmatrix}$$

一个点是属于一个 affine space, 而不是一个 vector space。所以点和点之间没有相加的运算。

本文中我们用列向量表示点和向量。

向量是点和点之间的差，所以向量的第四维永远是 0。

$$v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\0\end{bmatrix}$$

线速度，角速度都是向量。

对符号的说明：当我们单纯使用字母表示向量时，表示的是 3 维的量。如果我们要表示齐次坐标，我们会显式写出：

$$\begin{bmatrix}p\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}v\\0\end{bmatrix}$$

3 坐标系

我们经常需要将点和向量在不同的坐标系之间进行变换，这种变换是表示上的变换，而不是测量上的变换。也就是说将一个速度从一个坐标系变换

到另一个坐标系，只是用另一个坐标系的坐标来表示这个速度，并不是在另一个坐标系里重新测量这个速度。

换句话说，本文中所有的坐标系都是惯性坐标系。在力学书中，我们会遇到非惯性坐标系。

我们定义 2 个坐标系，一个是空间坐标系，用 $\{s\}$ 表示。另一个是刚体坐标系，用 $\{b\}$ 表示。我们说刚体坐标系，实际上说的是与瞬时的刚体位姿重合的一个惯性坐标系。刚体坐标系也是固定的坐标系。

我们用变量右上角的上标来表示变量是用哪个坐标系的坐标表示的。例如：p^s 是用空间坐标系的坐标表示的点，p^b 是用刚体坐标系的坐标表示的同一个点。

不管是点还是向量，更换坐标仅仅是换一种表示，点还是那个点，向量还是那个向量，是同一个量。

4 坐标变换：旋转情形

本节都是 3 维坐标。如果二个坐标系之间仅仅相差一个旋转 R_{sb}，即 R_{sb} 的 3 个列分别为 $\{b\}$ 坐标系的坐标轴在 $\{s\}$ 坐标系中的坐标。那么从 $\{b\}$ 到 $\{s\}$ 的坐标变换公式为：

$$p^s = R_{sb}p^b$$

线速度和角速度都可以用这个公式进行变换。

5 旋转是否是向量

有限的旋转不是向量，因为 2 个旋转由于应用的顺序不同会导致不同的最终位置。

无穷小旋转是向量，所以角速度是向量。证明见 [1] 6.2。

6 坐标变换：一般情形

一般情形下，二个坐标系之间除了相差旋转 R 之外，还相差一个平移 r。这种情况下坐标变换公式就用上了齐次坐标了。假设 $\{b\}$ 坐标系的坐标

轴是由 $\{s\}$ 的坐标轴先旋转 R，再平移 r 得到的。我们用 T_{sb} 表示这个变换（在不引起混淆的情形下我们省去下标）：

$$T = \begin{bmatrix} R & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

那么从 b 到 s 的坐标变换公式为：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p^s \\ 1 \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} p^b \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^b \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从而有

$$p^s = Rp^b + r$$

7 旋转变换的指数表示

本节我们要研究的问题是，在已知旋转轴 ω 和旋转角度 θ，如何得到一个旋转变换 R 的具体表示。不涉及坐标系的变换。

假设我们有一个点 $p(t)$ 围绕着原点以单位角速度 ω 旋转了时间 θ，那么我们得到的新的点 $p(\theta)$ 就是 $Rp(0)$

我们用微分方程来表示这个过程中 $p(t)$ 的运动速度。根据角速度和线速度的计算关系有：

$$\begin{aligned} p(\dot{t}) &= \omega \times p(t) \\ &= [\omega]p(t) \end{aligned}$$

求解得：

$$p(\theta) = e^{[\omega]\theta}p(0)$$

从而：

$$R = e^{[\omega]\theta}$$

计算得到

$$R = I + sin(\theta)[\omega] + (1 - cos(\theta))[\omega]^2$$

通过计算 RR^T 以及行列式的连续性可以得到 R 是属于 $SO(3)$。

8 刚体变换的指数表示

假设我们围绕任意一个旋转轴 ω 旋转了 θ 角。这个旋转轴不一定在坐标原点。旋转轴上有任意一点 r，ω 是单位角速度。旋转角度就是旋转的时间。根据角速度和线速度的关系列出微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}(p-r)}{\mathrm{d}t} = \omega \times (p-r)$$

r 可以是轴上任意一点是因为加上一个平行于轴的向量不影响上面的方程。旋转轴不移动，所以 $\dot{r} = 0$。

用齐次坐标可以化成类似于上一节里的方程的形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\omega] & -\omega \times r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}$$

方程的解为：

$$p(\theta) = e^{[\xi]\theta} p(0)$$

其中：

$$v = -\omega \times r$$

$$\xi = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}$$

$$[\xi] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

v 的几何解释是刚体上位于原点处的一个点的线速度。刚体本身是围绕 ω 以单位角速度旋转的。

所以：

$$\begin{aligned} T &= e^{[\xi]\theta} \\ &= \begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & (I\theta + (1-cos\theta)[\omega] + (\theta - sin\theta)[\omega]^2)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ξ 称为 screw axis，旋量轴。也称为单位 twist。因为这里的角速度都是单位角速度。

如果是纯平移，那么 $\omega = 0$。v 就是平移方向的单位速度。θ 是移动的距离。有 2 种方式可以得到新的公式，一种是通过直观得到，一种是将前面的量带入上面的公式。2 种方式得到的公式是一致的。

$$T = \begin{bmatrix} I & \theta v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9 旋转变换的速度表示

本节计算旋转变换 R 和角速度的关系。本节里的旋转变换 R 是随时间变换的 $R(t)$。

我们假设刚体上有一个附着的点 p^b。$R(t)$ 是刚体的瞬时位姿。本节我们只考虑旋转的情况。一般的刚体运动在下节讨论。

有坐标变换公式：

$$p^s = Rp^b$$

对上式左右同时求导。

$$\dot{p^s} = \dot{R}p^b + R\dot{p^b}$$

因为 p 是附着在刚体上的，所以 p^b 是不变的，$\dot{p^b} = 0$。

$$\begin{aligned} \dot{p^s} &= \dot{R}p^b \\ &= \dot{R}R^{-1}p^s \end{aligned}$$

可以看出 $\dot{R}R^{-1}$ 将点的位置变成了点的线速度。

又有角速度和线速度的公式：

$$\dot{p^s} = [\omega]p^s$$

所以：

$$[\omega] = \dot{R}R^{-1}$$

10 一般刚体运动的速度表示：Twist 的定义

继续沿用上一节的思路，只是把 R 换成一般的刚体运动 T。T 表示刚体的瞬时位姿。

$$\begin{bmatrix} p^s \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} p^b \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p^s} \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{T}T^{-1} \begin{bmatrix} p^s \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以 $\dot{T}T^{-1}$ 将位置变成线速度。

我们定义 twist 矩阵 $[V]$ 为 $\dot{T}T^{-1}$，所以 twist 就是对刚体速度的完整刻画，它把刚体上附着的点的位置转成点的线速度。twist 是一个向量，可以做向量运算。

下面计算 twist 的具体表示。

$$\begin{aligned} [V] &= \dot{T}T^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{-1} & -R^{-1}r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\omega] & -\omega \times r + \dot{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

定义 twist V 为

$$V = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ -\omega \times r + \dot{r} \end{bmatrix}$$

在 twist 中，v 是作为角速度的一个补充，通过矩阵乘法来得到线速度，它与角速度是互相独立的，它本身并不是刚体的线速度。

我们来推导一下刚体坐标系原点的线速度。刚体坐标系原点的坐标是 r。

$$[V] \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v + \omega \times r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ 0 \end{bmatrix}$$

11 对 Twist 公式的另一种推导

我们假设刚体围绕着刚体上的一个点 r 在转动，同时刚体本身也在平移运动，即 r 的坐标在变化。那么刚体上一点 p 与 r 之间有如下的关系：

$$\frac{\mathrm{d}(p-r)}{\mathrm{d}t}=\omega\times(p-r)$$

$$\dot{p}=\omega\times p+\dot{r}+\omega\times(-r)$$

把这个式子写成矩阵的形式就得到了 twist V 的表示。

当变换到 $\{b\}$ 坐标系时，$r^b=0,\dot{r}^b\neq 0$

12 速度的坐标系变换

本节讨论速度向量的坐标系变换。注意变换坐标系时，我们表示的还是同一个向量。向量本身没有变化，变化的是它的坐标表示。

我们还是从第一原理来推导。

根据坐标变换关系我们有

$$v^s=Rv^b$$

$$\omega^s=R\omega^b$$

由前面的

$$v^s=\dot{R}p^b$$

$$R^{-1}v^s=R^{-1}\dot{R}p^b$$

从而有

$$v^b=R^{-1}\dot{R}p^b$$

因为：

$$[\omega^s]=R[\omega^b]R^{-1}$$

所以：

$$[\omega^b]=R^{-1}\dot{R}$$

13 Twist 的坐标系变换

因为有：

$$\begin{bmatrix} v^s \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{T} \begin{bmatrix} p^b \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以：

$$\begin{bmatrix} v^b \\ 0 \end{bmatrix} = T^{-1}\dot{T} \begin{bmatrix} p^b \\ 0 \end{bmatrix}$$

刚体坐标系下的 twist 矩阵为

$$\begin{aligned} [V^b] &= T^{-1}\dot{T} \\ &= \begin{bmatrix} R^{-1}\dot{R} & R^{-1}\dot{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以

$$V^b = \begin{bmatrix} \omega^b \\ v^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^b \\ R^{-1}\dot{r} \end{bmatrix}$$

$$[V^s] = T[V^b]T^{-1}$$

定义 T（$\{b\}$ 在 $\{s\}$ 里的位姿表示）的伴随表示：

$$T = \begin{bmatrix} R & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[Ad_T] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [r]R & R \end{bmatrix}$$

则

$$V^s = [Ad_{T_{sb}}]V^b$$

$$V^b = [Ad_{T_{bs}}]V^s = [Ad_{T_{sb}}]^{-1}V^s$$

因为 screw axis 是单位 twist，所以本节的变换公式也适用于 screw axis。

14 Twist 和旋量的区别

[2] 里定义了 twist，同时又引入旋量轴对 twist 进行解释。这里容易引起一个混淆，即认为 twist 和旋量是同一回事。但是它们不是一回事。如果认为它们是一回事，会在后面推导逆运动学 Newton-Raphson 算法时遇到困难。

[2] 并没有引入旋量的概念，而只是引入了旋轴 screw axis。这是它严谨的地方。下面我们对 twist（我将它译成旋速），旋量 (我将它翻译成 screw，没有去查英文原著)，旋量轴（screw axis）的定义和区别作出说明。

首先 [2] 在 3.3.2 节定义了 twist。twist 是位移变换 T 的时间变化率和它自身的乘积，物理意义是角速度和线速度，当然，还要区分在哪个坐标系里。这里我们忽略坐标系，坐标系不影响对概念的界定。所以从这个定义可以确定二件事，第一，twist 表示速度，第二，twist 的量纲是 sec^{-1}。我们要注意量纲，量纲对于界定概念起到关键作用。

接着，[2] 在 3.3.2.2 引入了 screw axis，即将 twist 表示成为旋轴与角度变化率 $\dot{\theta}$ 的乘积。这个旋轴可以看成是一个量纲为 1 的方向向量，也可以看成是一个量纲为 sec^{-1} 的单位角速度。后者我们在定义旋量的时候用到。

Twist 和旋轴都是 6 维向量。它有对应的 4×4 矩阵形式。

[2] 并没有引入旋量的概念，而只是说，如果绕着旋轴旋转角度 θ 那么长的时间，就可以通过矩阵指数函数得到位置变换矩阵。这里注意，不管是 twist 还是旋轴（单位 twist），都不能直接把对应的矩阵形式放到指数上去得到位置变换矩阵。而需要乘上一个时间系数。因为它们表示的是速度，而位置变换矩阵表示的是位置，之间相差一个时间系数的乘积。

所以我们把旋轴和时间系数的乘积定义为旋量，直观理解就是关于这个旋轴旋转了多少角度。旋量的矩阵形式通过指数运算就得到旋量对应的位置变换矩阵。

至此我们将这 3 个相关联的概念定义清楚了。

如果用李群李代数的语言来说，位置变换矩阵 $SE(3)$ 是李群，旋量 $se(3)$ 是对应的李代数。

15 旋量和 twist 的关系

此时，我们有一个容易想到的问题就是：既然旋量和 twist 相差一个时间系数，那么是否可以认为旋量 ξ 的时间导数就是 twist 呢？实际上，旋量

的时间导数与 twist 之间相差一个位姿关于旋量的 Jacobian.

这个问题参见 [3] 7.2

16 逆运动学的完整推导

终于搞出了数学上严格的推导。

对于方程

$$y = f(x) = 0$$

Newton 法解方程本质上是要找出无穷小量 δx 和 δy 之间的关系。在一般情况下，它们之间的关系就是 f 的导数，是一个线性关系。

但是在 $\delta T \in SE(3)$ 和 $\delta\theta$ 之间，不再是线性关系。下面就是要推导这 2 个无穷小量之间的数量关系。

根据 [3] 7.115a,

$$log(\delta T) = J_r \delta\xi$$

根据 [3] 7.219, 有旋量的时间导数与 twist 的关系，书中提供的是左 Jacobian 和 spacial twist, 我们可以通过伴随作用，得到右 Jacobian 和 body twist 的关系。注意旋量是没有坐标系的区分的。

$$V^b = J_r\dot{\xi}$$

又根据 [2] 5.15 有 body twist 与关节角度的关系：

$$V^b = J_b(\theta)\dot{\theta}$$

将上面二个式子的右边相等，同时消去微小时间 dt，得到旋量与关节角度的无穷小关系

$$J_r\delta\xi = J_b(\theta)\delta\theta$$

所以最终得到

$$log(\delta T) = J_r\delta\xi = J_b(\theta)\delta\theta$$

这里最难的一步是 [3] 7.75 的推导。将 wiki 上 Bernoulli number 的定义代入进去，可以验证 $J_l J_l^{-1} = I$。正向推导可以从 [4] Proposition 2.5 得到。见下面一节。

7.76 的推导见 [5]。

17 从 Baker Proposition 2.5 到 Barfoot (7.75)

对于旋量 $\phi \in se(3)$,

$$ad_{\phi_1}(\phi_2) = \phi_1^\wedge \phi_2^\wedge - \phi_2^\wedge \phi_1^\wedge = \phi_1^\curlywedge \phi_2$$

从而当 $t \to 0$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} exp(A+tB) = J(A)Bexp(A)$$

$$\frac{1}{t}(exp(A+tB) - exp(A)) = J(A)Bexp(A)$$

$$exp(A+tB) - exp(A) = J(A)tBexp(A)$$

$$exp(A+tB) = (I + J(A)tB)exp(A)$$

$$exp(A+tB) = exp(J(A)tB)exp(A)$$

令 $C = J(A)tB$

$$A + J(A)^{-1}C = ln(exp(C)exp(A))$$

18 关于机器人位姿的李群李代数表示

机器人的位姿 T 是李群里的元素，位姿的指数坐标，也就是旋量，是李代数里的元素。泛化速度 twist 也是李代数里的元素。twist 乘上时间就变成旋量 screw，也就是指数坐标。

旋量的指数是位姿。但是 twist 的指数不是位姿，twist 的指数的物理意义不明确，我觉得 twist 的指数没有物理意义。

旋量的时间导数在一般情况下不是 twist，前面有一个 Jacobian。在旋轴不变的情况下是 twist，这时的 Jacobian 退化成 I 矩阵。

twist 的物理意义是 twist 乘上一个齐次位置向量得到该质点的线速度。

19 Wrench

这个概念 Modern Robotics 讲的不清楚。在 [6] 里 3.1.2 节有详细阐述。

一个作用在刚体上的力可以等价于一个力矩加上一个作用在质心上的力。力矩不和某个具体的点有关，只有方向。

20 Wrench 的坐标系变换

Twist 和 wrench 的内积就是功率。变换坐标系表示，功率不变。所以有：

$$V^{s^T} F^s = V^{b^T} F^b$$

$$F^b = [Ad_{T_{sb}}]^T F^s$$

$$\begin{bmatrix} \tau^b \\ f^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T[r] \\ 0 & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau^s \\ f^s \end{bmatrix}$$

$$\tau^b = R^T \tau^s - R^T [r] f^s$$

$$f^b = R^T f^s$$

21 Wrench 坐标变换的一个例子

考虑一个棍子，左端通过一个旋转电机固定在墙上，右端悬空。$\{b\}$ 坐标系原点位于棍子重心，重心的 $\{s\}$ 坐标为 r，$\{s\}$ 坐标系原点位于左端。考虑要使棍子处于水平平衡状态，电机需要释放的扭矩。

假设棍子的重力为 g。那么平衡态需要的 $\{b\}$ 坐标系里的 wrench 为：$\tau^b = 0, f^b = -g$

根据坐标变换公式，得到 $\{s\}$ 坐标系的 wrench 为：$\tau^s = r \times -g, f^s = -g$

也就是说，$\{s\}$ 坐标系里需要一个向上的力，由墙提供，以及一个逆时针的扭矩，扭矩的方向符合直观。

注意：这里用来做转换的 wrench 是我们为了达到某种状态而需要提供的 wrench，不是作用在棍子上的最终 wrench。本例中我们需要的 wrench 是平衡态下的 wrench（也就是 0）加上负的重力，这样才能抵消重力，达到平衡态。

22 基坐标系里的位姿公式

机械臂里有 2 个坐标系：基坐标系 $\{s\}$ 和工具坐标系 $\{t\}$

设 M 是工具坐标系在所有的关节角度都是 0 的时候的位姿表示。

${\xi_i}^s$ 为关节 i 的旋轴在基坐标系的表示。θ_i 为关节 i 的旋转角度。

我们要求的是当关节角度为 $\theta_1, \ldots, \theta_n$ 的时候，工具坐标系的位姿。

我们想象从最外面的关节 n 开始依次旋转关节。经过旋转关节 n，工具坐标系的新位姿变成：

$$T = e^{[\xi_n]\theta_n}$$

然后旋转关节 $n-1$，只需要把已有的位姿前面再作用一个旋轴矩阵。我们得到最终的位姿：

$$T(\theta) = e^{[\xi_1]\theta_1} \ldots e^{[\xi_n]\theta_n} M$$

23 工具坐标系里的位姿公式

思路是这样：把每个旋轴的坐标变换到工具坐标系里，然后按照上面的公式做，这时得到的是工具坐标系里的位姿，再用 M 变换到基坐标系里即可。

从基坐标系变换到工具坐标系的变换是 M^{-1}，旋轴变换到工具坐标系：

$$[{\xi_i}^t] = M^{-1}[{\xi_i}^s]M$$

$$T(\theta) = Me^{[{\xi_1}^t]\theta_1 + \cdots + [{\xi_n}^t]\theta_n}$$

24 Jacobian 的定义

我们把工具位姿看成是关节角度的函数，关节角度又是时间的函数，从而有：

$$x(t) = f(\theta(t))$$

对上式左右同时求导，我们得到工具速度和关节角速度的关系：

$$\dot{x} = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}\dot{\theta} = J(\theta)\dot{\theta}$$

Jacobian 将关节角速度变化成工具速度。这个是 Jacobian 的一般定义。

工具速度有不同的定义方法。可以是根据三维空间坐标来定义，也可以用 twist 来定义。我们把 twist 与关节角速度之间的 Jacobian 称为 geometric Jacobian。把三维坐标速度与关节速度之间的 Jacobian 称为 coordinate Jacobian，又叫 analytic Jacobian。

$$V = J(\theta)\dot{\theta}$$

25 Jacobian 的计算

我们可以用上面的位姿变换 T 来硬算 Jacobian 在基坐标系中的表示:

$$[V^s] = \dot{T}T^{-1} = [\xi_1]\dot{\theta}_1 + e^{[\xi_1]\theta_1}[\xi_2]e^{-[\xi_1]\theta_1}\dot{\theta}_2 + e^{[\xi_1]\theta_1}e^{[\xi_2]\theta_2}[\xi_3]e^{-[\xi_2]\theta_2}e^{-[\xi_1]\theta_1}\dot{\theta}_3 + \dots$$

$$V^s = \xi_1\dot{\theta}_1 + Ad_{e^{[\xi_1]\theta_1}}(\xi_2)\dot{\theta}_2 + Ad_{e^{[\xi_1]\theta_1}e^{[\xi_2]\theta_2}}(\xi_3)\dot{\theta}_3 + \dots$$

V^s 的 ω 分量就是工具坐标系的角速度。

也可以从几何上来推导。因为 twist 和旋轴是向量，所以它们可以相加。前提是要变换到同一坐标系中。旋轴乘上角速度就是每个关节贡献的 twist。终端的 twist 就是所有关节的 twist 在基坐标系中的表示的和。

工具坐标系中的 Jacobian 的计算类似。我们需要把初始位置时的工具坐标系里的各个旋轴 ${\xi_i}^t$ 变换到当前的工具坐标系里，因为坐标系 $\{n\}$ 相对于坐标系 $\{n-1\}$ 是围绕轴 n 旋转了 θ，所以旋轴 ξ_{n-1} 就相对于坐标系 $\{n\}$ 旋转了 $-\theta$。所以有新的旋轴 n-1：

$$\xi'_{n-1}{}^{t} = Ad_{e^{-[\xi_n{}^t]\theta_n}}(\xi_{n-1}{}^{t})$$

旋轴 1 需要从相对于 n 的远端开始旋转，所以先旋转轴 2

$$\xi'_1{}^{t} = Ad_{e^{-[\xi_n{}^t]\theta_n}\dots e^{-[\xi_2{}^t]\theta_2}}(\xi_1{}^{t})$$

$$V^t = \xi_n{}^t\dot{\theta}_n + \xi'_{n-1}{}^{t}\dot{\theta}_{n-1} + \ldots + \xi'_1{}^{t}\dot{\theta}_1$$

26 Jacobian 的应用

Jacobian 的一个常见应用是将关节速度 $\dot{\theta}$ 转换成 TCP 点在空间坐标系中的速度。

令 TCP 点在空间中的坐标为 P. TCP 的速度通过下式计算：

$$v_{tcp} = [V^s]\begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}$$

27 逆运动学问题的定义

给定一个位姿 X，求关节的角度 θ，使得机械臂的工具处于该位姿：$T(\theta) = X$。

28 逆运动学问题的数值解

非线性方程的数值解。

Newton-Raphson 方法。

29 工具 wrench 与关节 torque 的关系

根据功率守恒原理，我们有工具上的功率等于关节扭矩功率之和：

$$\dot{\theta}^T\tau = {V^t}^T F^t = \dot{\theta}^T {J^t}^T F^t$$

从而有关节扭矩与工具 Wrench 的关系：

$$\tau = {J^t}^T F^t$$

30 刚体上的点的加速度

假设刚体的 twist 为 $V^b = (\omega^b, v^b)$。刚体上附着的一个点 p_i 的以刚体坐标系 $\{b\}$ 来表示的速度和加速度的计算（都相对于惯性坐标系）。r_i 为 p_i 的位置。

$$\dot{p_i} = \omega^b \times p_i + v^b$$

$$\ddot{p_i} = \dot{v^b} + [\dot{\omega^b}]r_i + [\omega^b]v^b + [\omega^b]^2 r_i$$

31 质点角动量的定义

$$L = r \times p$$

32 关于机械臂控制的一般思路

第一，得到动力学方程 $\tau = \ldots$；第二，得到控制律 $\tau = \ldots$；第三，将控制律代入动力学方程，得到关于 θ_e 的误差动力学方程，通过调整方程系数使得误差 θ_e 趋向于 0。

33 虚位移

满足约束方程的无穷小位移，去除时间项。

34 Constraint Force

与任意 virtual displacement 做内积为 0 的力。

35 李括号的意思

这里有点模糊。不过前面的 7.75 的推导不依赖李括号的含义。

设 x, y 为李代数元素。X, Y 是他们的矩阵形式。g 为 x 对应的李群元素。用 g 去 adjoint$y$，求微分之后得到新的李代数元素：

$$Y' = gYg^{-1} = XY - YX$$

假设

$$y' = ad(x)y$$

$ad(x)$ 是一个矩阵，是 x 的 adjoint 矩阵。

李括号：

$$[x, y]^{\vee} = y' = XyX^{-1} = ad(x)y$$

对于 $so(3)$,

$$ad(x) = x^{\wedge}$$

对于 $se(3)$,

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}$$

$$ad(x) = \begin{bmatrix} \omega^{\wedge} & 0 \\ v^{\wedge} & \omega^{\wedge} \end{bmatrix}$$

参考文献

[1] Reinhardt M. Rosenberg. *Analytical Dynamics of Discrete Systems*. Springer, 1977.

[2] Kevin M. Lynch and Frank C. Park. *Modern Robotics*. Cambridge University Press, 2017.

[3] Timothy D. Barfoot. *State Estimation for Robotics*. Cambridge University Press, 2017.

[4] Andrew Baker. *Matrix Groups An Introduction to Lie Group Theory*. Springer, 2002.

[5] Arieh Iserles. Lie-group methods. *Acta Numerica*, 2005.

[6] Dietmar Gross et al. *Engineering Mechanics 1*. Springer, 2013.